

به نام پروردگار مهربان

هفتم سه

ریاضی

دوازدهم

آموزش به سبک لقمه

آرین تفضلی زاده

مدیر و ناظر علمی گروه ریاضی: عباس اشرفی



مهروماه

مقدمه

به نام ناب‌ترین واژه زندگی خدا

یکی از دغدغه‌های اصلی دانش‌آموزان در دوران امتحانات نهایی، جمع‌بندی مباحث درسی و مرور نکات و تمرین‌های مهم کتاب درسی است. همه‌ساله دانش‌آموزان در دوران امتحانات نهایی درگیر منابع زیادی برای مرور می‌شوند که به راحتی نمی‌توانند به آنها اعتماد کنند و دچار وسواس مطالعاتی می‌شوند. کتاب‌های لقمه، متخصص در امر خلاصه‌سازی و ارائه مطالب مفید، کاربردی و اصلی کتاب‌های درسی در کوتاه‌ترین زمان ممکن هستند. کتاب پیش‌رو حاصل ۶ ماه تلاش بی‌وقفه و باوسواس برای رسیدن شما به نتیجه مطلوب است.

در این کتاب مثال‌های مهم کتاب درسی، تمرین‌ها و کار در کلاس‌های مهم و کاربردی با راه‌حل‌های کاملاً تشریحی و مفهومی به طور کامل آورده شده است.

در نهایت منبع مناسبی برای رسیدن به نتیجه مطلوب در امتحان نهایی درس هندسه ۳ را در اختیار شما قرار دادیم تا به امید خدا بتوانید به راحتی نمره عالی در این درس کسب کنید. فقط کافیست بدونید با مطالعه این کتاب در کمترین زمان ممکن، بهترین نتیجه حاصل خواهد شد. (با لقمه، ۲۰ نهایی تو مُشته)

تشکر و قدردانی

■ از مدیریت محترم انتشارات مهروماه جناب آقای احمد اختیاری برای پیشنهادات سازنده در مراحل تولید کتاب

■ جناب آقای مهندس عباس اشرفی مدیر دپارتمان ریاضی انتشارات مهروماه که همواره به عنوان استاد راهنما و برادر بزرگ‌تر در تمامی مراحل تألیف در کنار بنده بودند.

■ از زحمات و تلاش‌های بی‌وقفه سرکار خانم دنیا سلیمی مسئول ویراستاری برای پیشنهاد قراردادن فصل آزمون در پایان هر فصل

■ سرکار خانم زهرا انیشه که برای تدوین و ویرایش کتاب بسیار تلاش کردند و زحمت کشیدند.

و به نوبه خودم از تیم بزرگ مهروماه که شبانه‌روز برای رسیدن این کتاب به دست دانش‌آموزان سرزمینم تلاش کردند، سپاسگزارم. از پدر و مادر عزیزم که در تمام مراحل زندگی مشوق و حامی من بودند صمیمانه قدردانی می‌کنم.

برای همه دانش‌آموزان ناب سرزمینم، از خالق احساس حال دل‌آرام، آرامشی از جنس لبخند خداوند و سلامتی و توفیق را خواستارم.

امضای خالق احساس پای تمام آرزوهای به صلاحتون

آرین تفضلی‌زاده

پاییز ۱۳۹۸

فهرست

فصل ۱ ماتریس و کاربردها ۷

فصل ۲ آشنایی با مقاطع مخروطی ۵۳

فصل ۳ بردارها ۹۳

پیوست ۱۲۷

امتحان نهایی خرداد ۹۸ ۱۲۸

فرمول‌نامه ۱۳۵



مثال: دترمینان ماتریس زیر را بیابید.

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & 2 & -3 \\ 2 & 11 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

پاسخ

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ -1 & 13 \end{vmatrix} \Rightarrow |A| = (1)(13) - (6)(-1)$$

$$\Rightarrow |A| = 13 - (-6) = 19$$

ب دستور ساروس برای محاسبه دترمینان ماتریس‌های 3×3 :

در این روش (فقط برای ماتریس‌های (3×3) قابل استفاده است.) دو ستون اول و دوم ماتریس را در کنارش می‌نویسیم و دترمینان ماتریس A

برابر است با مجموع حاصل ضرب درایه‌های واقع بر قطر اصلی و دو قطر موازی آن (مطابق شکل)، منهای مجموع حاصل ضرب درایه‌های واقع بر قطر فرعی و دو قطر موازی آن به صورت زیر:

$$|A| = (aei + bfg + cdh) - (ceg + afh + bdi)$$

مثال: دترمینان ماتریس A را با استفاده از دستور ساروس

محاسبه کنید.

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

پاسخ

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} \quad |A| = (2 + 0 + 12) - (0 - 2 + 8) = 8$$

مثال: دترمینان ماتریس A را بر حسب ستون سوم و با استفاده از دستور ساروس محاسبه کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

پاسخ

ابتدا توسط بسط بر حسب ستون سوم، دترمینان را به دست می آوریم:

$$|A| = 3 \times (-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + 0 + 4 \times (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -6 + 4 = -2$$

حال توسط روش ساروس محاسبه می کنیم:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & 2 & 0 \end{vmatrix} \quad |A| = (4 + 0 + 0) - (6 + 0 + 0) = -2$$

یادداشت: دترمینان ماتریس صفر، همواره صفر است.

◀ دترمینان ماتریسی که یک سطر یا یک ستون آن مضرب

غیر صفری از سطر یا ستون دیگر است همواره برابر صفر است.

◀ دترمینان ماتریسی که سطر یا ستون تکراری داشته باشد برابر

صفر است.



مثال: دترمینان ماتریس‌های زیر را محاسبه کنید.

$$\text{الف) } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 1 \times (-1)^2 \times \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 8$$

$$\text{ب) } A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 0$$

$$\text{پ) } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

سطر دوم مضربی از سطر اول است. $\Rightarrow |A| = 0$

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ باشد، در این صورت $|A^2|$ را بیابید. (مشابه تمرین کتاب درسی)

پاسخ می‌دانیم $|A^n| = |A|^n$ داریم: $|A^2| = |A|^2$

دترمینان ماتریس A را به روش ساروس محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 \cdot 5 = 40$$

$$\Rightarrow |A^2| = |A|^2 = (40)^2 = 1600$$

⚠ توجه: دترمینان ماتریس‌هایی که بالا و پایین قطر اصلی همهٔ عناصر آن صفر هستند (ماتریس‌های قطری) برابر با حاصل ضرب درایه‌های واقع بر قطر اصلی است.

$$B = \begin{bmatrix} a & \circ & \circ \\ \circ & b & \circ \\ \circ & \circ & c \end{bmatrix} \Rightarrow |B| = abc$$

🔍 چاشنی: ویژگی‌های دترمینان:

❶ دترمینان هر ماتریس عددی حقیقی است.

❷ $|A \pm B| \neq |A| \pm |B|$

❸ $|A^n| = |A|^n$

❹ به شرطی که A و B مربعی باشند. $|AB| = |A||B|$

❺ n مرتبهٔ ماتریس است. $|\lambda A| = \lambda^n |A|$

(اگر از λ برابر یک ماتریس بخواهیم دترمینان بگیریم کافی است λ را به توان مرتبه رسانده و در همان مقدار دترمینان A ، ضرب کنیم)

🏠 مثال: اگر $A = 2 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & |A| \end{bmatrix}$ باشد، دترمینان ماتریس A^2 را بیابید.

(مشابه تمرین کتاب درسی)

پاسخ می‌دانیم: $|A^n| = |A|^n$

$$|A| = \left| 2 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & |A| \end{bmatrix} \right| = 2^2 \left| \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & |A| \end{bmatrix} \right|$$

$$|A| = 4 \times (|A| - 6) \Rightarrow -3|A| = -24 \Rightarrow |A| = 8$$

$$|A|^2 = (8)^2 = 64$$



مثال: اگر A ماتریسی 3×3 و اسکالر باشد و $a_{11} = 4$ در این صورت $|A|$ را بیابید.

پاسخ

$$a_{11} = 4 \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = 4 \times 4 \times 4 = 4^3 = 64$$

مثال: اگر A ماتریسی 3×3 باشد و $|A| = 5$ در این صورت حاصل $||A|A|$ را بیابید.

پاسخ

$$|A_{3 \times 3}| = 5 \Rightarrow ||A|A| = |5A| = 5^3 |A|$$

$$\Rightarrow 5^3 \times 5 = 5^4 = 625$$

آزمون فصل اول



۱. فرض کنید $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & -5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ ، یک ماتریس

3×2 مانند C را طوری پیدا کنید که $A + B - C = O_{3 \times 2}$.

پاسخ

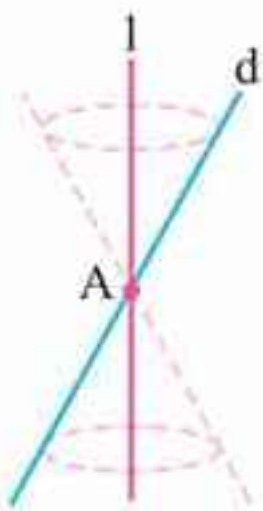
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & -5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{bmatrix}$$

فصل دوم

آشنایی با مقاطع مخروطی

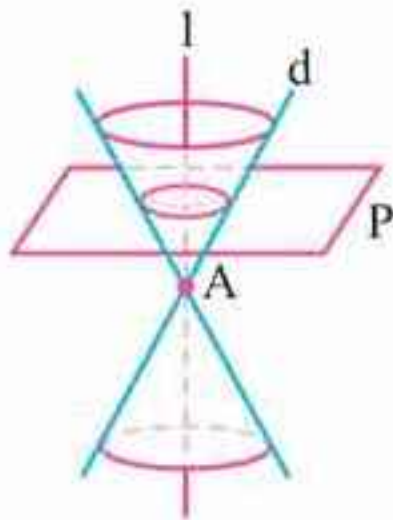
وعدۀ ۱

رویهٔ مخروطی

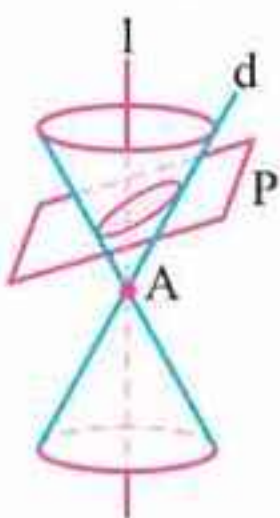


فرض کنید دو خط d و l در نقطهٔ A ، متقاطع (غیر عمود) باشند. سطح حاصل از دوران خط d حول خط l را یک رویهٔ مخروطی (سطح مخروطی) می‌نامیم، در این حالت خط l را محور، نقطهٔ A را رأس و خط d را مولد این سطح مخروطی می‌نامیم.

حال به‌طور شهودی با فصل مشترک یک صفحه و یک سطح مخروطی، با توجه به حالت‌های مختلف صفحه و سطح مخروطی نسبت به هم، آشنا می‌شویم.



الف در حالتی که صفحهٔ P بر محور سطح مخروطی عمود باشد و از رأس آن عبور نکند، شکل حاصل دایره است.

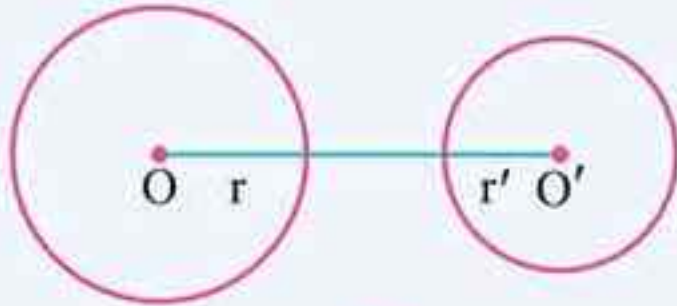


ب در حالتی که صفحهٔ P بر محور l عمود نباشد و با مولد d نیز موازی نباشد و تنها یکی از دو نیمهٔ مخروط را قطع کند، سطح حاصل یک بیضی خواهد بود.



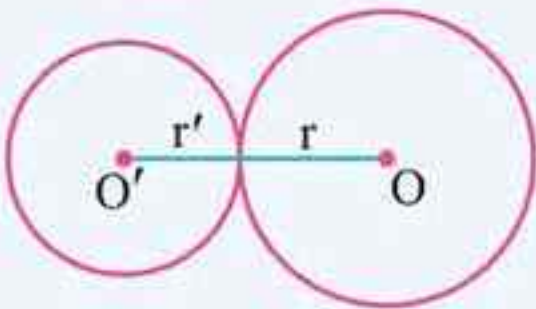
یادآوری: اوضاع نسبی دو دایره که در سال گذشته با آن آشنا شدید، در برخی سوالات مورد نیاز است. دو دایره $C(O, r)$ و $C'(O', r')$ را با فرض $r > r'$ و $OO' = d$ در نظر می‌گیریم که این دو دایره می‌توانند ۵ حالت نسبت به هم داشته باشند:

۱ دو دایره متخارج:



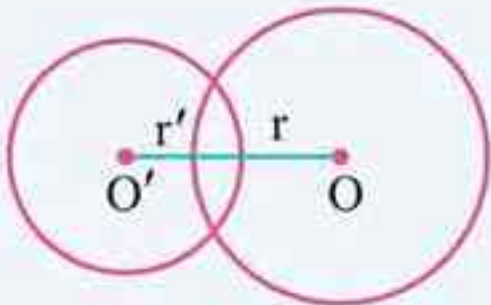
$$d > r + r'$$

۲ دو دایره مماس برون:



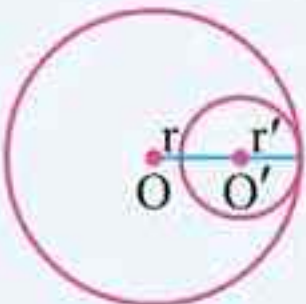
$$d = r + r'$$

۳ دو دایره متقاطع:



$$|r - r'| < d < r + r'$$

۴ دو دایره مماس درون:



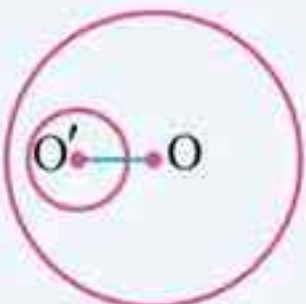
$$d = |r - r'|$$

۵ دو دایره هم‌مرکز:



$$d = 0$$

۶ دو دایره متداخل:



$$|d| < |r - r'|$$

مثال: معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن نقطه

$$O(-1, 1) \text{ بوده و بر دایره به معادله } x^2 + y^2 - 4x + 4y - 1 = 0$$

مماس بیرونی باشد.

پاسخ ابتدا مختصات مرکز و شعاع دایره داده شده را به دست می‌آوریم:

$$O_1\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right) = (2, -2)$$

$$r_1 = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2} = \frac{\sqrt{16 + 16 + 4}}{2} = 3$$

می‌دانیم اگر $d = O_1O_2$ طول خط‌المركزین دو دایره مماس خارج

باشد، $d = r_1 + r_2$ ، بنابراین داریم:

$$d = |O_1O_2| = \sqrt{(2 - (-1))^2 + (-2 - 1)^2} = \sqrt{18}$$

$$\Rightarrow d = 3\sqrt{2}$$

$$d = r_1 + r_2 \Rightarrow 3\sqrt{2} = 3 + r_2 \Rightarrow r_2 = 3\sqrt{2} - 3$$

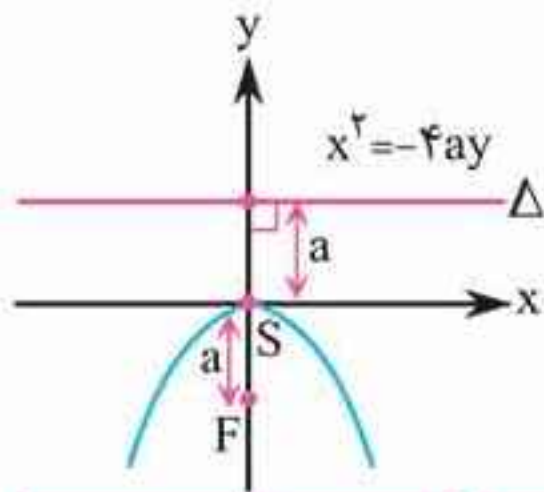
حال با داشتن مرکز و شعاع می‌توانیم معادله دایره خواسته شده را بنویسیم:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$$

$$\Rightarrow (x + 1)^2 + (y - 1)^2 = (3\sqrt{2} - 3)^2$$



۴ سهمی قائم رو به پایین



مرکز سهمی: $S(0, 0)$

کانون سهمی: $F(0, -a)$

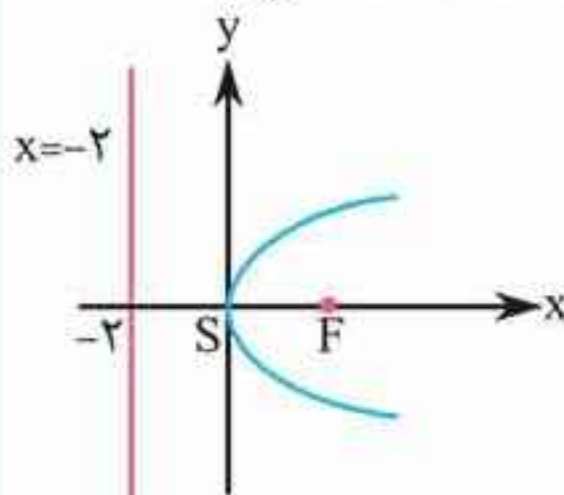
خط هادی: $\Delta: y = a$

مقاطع مخروطی

معادله سهمی ($a > 0$)	کانون	خط هادی	محور سهمی	دهانه سهمی
$y^2 = 4ax$	$(a, 0)$	$x = -a$	محور x	رو به راست
$y^2 = -4ax$	$(-a, 0)$	$x = a$	محور x	رو به چپ
$x^2 = 4ay$	$(0, a)$	$y = -a$	محور y	رو به بالا
$x^2 = -4ay$	$(0, -a)$	$y = a$	محور y	رو به پایین

مثال: معادله $y^2 = 8x$ مربوط به چه شکلی است؟

پاسخ: این معادله، یک سهمی است که دهانه آن به سمت راست و محور آن محور x هاست.



با قرار دادن $4a = 8$ داریم $a = 2$ لذا کانون آن $F(2, 0)$ و خط هادی آن موازی محور y ها، به معادله $x = -2$ و رأس آن مبدأ مختصات است.

$S(0, 0)$

$F(2, 0)$

$\Delta: x = -2$

ب) معادلات $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ مربوط به کدام محور است؟

پ) در فضای \mathbb{R}^3 ، نقطه A به طول ۲ روی محور طول‌ها و نقطه $B = (-4, 6, -3)$ مفروض‌اند. مختصات وسط AB را بیابید.
۱۲. اگر $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{k}$ و $\vec{b} = (1, 2, 1)$ باشد، طول بردار $\vec{a} - 2\vec{b}$ را به دست آورید.

۱۳. بردارهای $\vec{a} = (1, -3, 2)$ و $\vec{b} = (-2, 1, -5)$ را در نظر بگیرید.
الف) تصویر قائم بردار \vec{a} را بر امتداد بردار \vec{b} به دست آورید.
ب) برداری عمود بر دو بردار \vec{a} و \vec{b} بنویسید.

۱۴. ثابت کنید: دو بردار غیر صفر \vec{a} و \vec{b} با هم موازی هستند اگر و فقط اگر $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$.

۱۵. مقدار m را طوری تعیین کنید که سه بردار $\vec{a} = (1, m, -11)$ ، $\vec{b} = (2, 3, -1)$ و $\vec{c} = (1, -1, 3)$ در یک صفحه باشند.

۱۶. اگر طول بردارهای \vec{a} و \vec{b} به ترتیب ۴ و ۶ و $\vec{a} \cdot \vec{b} = 12$ باشد، مساحت مثلث بنا شده توسط دو بردار \vec{a} و \vec{b} را به دست آورید.

ماتریس و کاربردها

فصل ۱

۱ تساوی دو ماتریس:

$$A = [a_{ij}]_{m \times n}, B = [b_{ij}]_{m \times n}$$

$$\forall_{i,j}, a_{ij} = b_{ij} \Leftrightarrow [a_{ij}] = [b_{ij}]$$

۲ جمع و تفاضل دو ماتریس:

$$A = [a_{ij}]_{m \times n}, B = [b_{ij}]_{m \times n}$$

$$\Rightarrow A \pm B = [a_{ij}] \pm [b_{ij}] = [a_{ij} \pm b_{ij}]$$

۳ ضرب یک عدد در ماتریس:

$$A = [a_{ij}]_{m \times n}, r \in \mathbb{R} \Rightarrow rA = r[a_{ij}]_{m \times n} = [ra_{ij}]_{m \times n}$$

۴ خاصیت جابه‌جایی در جمع:

$$A + B = B + A$$

۵ خاصیت شرکت‌پذیری در جمع:

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

۶ خاصیت عضو خنثی برای عمل جمع ماتریس‌ها:

$$A + \bar{O} = \bar{O} + A = A$$

۷ خاصیت عضو قرینه برای عمل جمع ماتریس‌ها:

$$A + (-A) = (-A) + A = \bar{O}$$

$$r(A \pm B) = rA \pm rB$$

$$(r \pm s)A = rA \pm sA$$

$$rA = rB, r \neq 0 \Rightarrow A = B$$

$$A = B, r \neq 0 \Rightarrow rA = rB$$

۱۲ خاصیت عضو خنثی برای عمل ضرب ماتریس‌ها:

$$A_{n \times n} \times I_n = I_n \times A_{n \times n} = A_{n \times n}$$

۱۳ برای هر ماتریس مربعی مانند A ، وارون ماتریس A (در صورت وجود) ماتریسی است مانند B به طوری که داشته باشیم:

$$A \times B = B \times A = I$$

در این صورت B را وارون A می‌نامیم و با A^{-1} نمایش می‌دهیم.

۱۴ اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ، در این صورت وارون ماتریس A یعنی A^{-1}

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \quad \text{برابر است با:}$$

۱۵ در حالت کلی اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ماتریس ضرایب و $B = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}$

ماتریس مقادیر معلوم و $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ماتریس مجهولات دستگاه دو

معادله دو مجهول $\begin{cases} ax + by = e_1 \\ cx + dy = e_2 \end{cases}$ باشند، در این حالت دستگاه

مذکور به شکل $AX = B$ نوشته شده و در صورت وارون پذیر بودن A ($|A| \neq 0$) با ضرب طرفین در A^{-1} داریم:

$$AX = B \xrightarrow{\times A^{-1}} A^{-1}(AX) = A^{-1} \times B$$

$$\Rightarrow (A^{-1} \times A) \times X = A^{-1} \times B \Rightarrow X = A^{-1} \times B$$

۱۴ در معادله سهمی فاصله کانون تا خط هادی $2a$ است.

۱۵ فاصله رأس سهمی تا خط هادی و کانون همواره a واحد است.

بردارها فصل ۳

۱ برای به دست آوردن فاصله بین دو نقطه $A = (x_A, y_A, z_A)$ و $B = (x_B, y_B, z_B)$ از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

۲ مختصات وسط دو نقطه A و B از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$M = \frac{A + B}{2}$$

۳ حاصل جمع دو بردار در فضای \mathbb{R}^2 و \mathbb{R}^3 :

الف) $\vec{a} = (a_1, a_2)$ و $\vec{b} = (b_1, b_2)$

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$

ب) $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ، $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$

۴ تفاضل دو بردار همانند جمع دو بردار به صورت زیر است:

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$

$$\vec{i} = (1, 0, 0)$$

۵ بردار یکه محور x ها:

$$\vec{j} = (0, 1, 0)$$

۶ بردار یکه محور y ها:

$$\vec{k} = (0, 0, 1)$$

۷ بردار یکه محور z ها: